Sesión de resolución de problemas (soluciones)

19/02/2021

Selección de problemas de la segunda ronda de la Olimpiada de Matemáticas de Irán

Ejercicio 1 (2016.4)**.** *Tenemos n rectas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ en el plano de forma que no hay dos paralelas, y no hay tres que pasen por el mismo punto. Un punto de corte entre dos rectas se dice interior si hay al menos otro punto de corte a cada lado de cada una de las dos rectas. Prueba que hay al menos $(n-2)(n-3)/2$ puntos interiores.*

Solución: Los puntos interiores son los totales menos los exteriores. Los totales se calculan fácilmente como $(n-1)n/2$. Los exteriores tienen que coincidir con el extremo de alguna recta, luego se pueden acotar por $2n$, pero este argumento no es suficiente. Basta conseguir acotarlos por $2n-3$ (comprobar). Como el conjunto de puntos de corte tiene que tener un cierre convexo, y el polígono convexo con menor número de vértices es el triángulo, al menos 3 puntos exteriores se repiten, luego hay como mucho $2n-3$.

Ejercicio 2 (2019.1)**.** *Tenemos un rectángulo cuyos lados son espejos. Un rayo de luz entra por una esquina, y después de ser reflejado varias veces sale por la esquina opuesta a la que entró. Prueba que en algún momento el rayo pasa por el centro del rectángulo.*

Solución: Se entiende más fácil con un dibujo. En vez de dibujar un rayo que se refleja, vamos reflejando rectángulos para cubrir el camino del rayo. El rayo forma una recta entre dos vértices. Para que el rayo salga por el vértice opuesto y no el inicial, el diagrama tiene una longitud horizontal igual a un número impar de veces la del rectángulo, y lo mismo en vertical. Se deduce que hay un rectángulo medio. El diagrama tiene simetría de rotación 180, así que el rectángulo del medio tiene simetría de rotación. La simetría de rotación de 180 grados en el rectángulo equivale a una simetría central. La única forma de dejar un segmento invariante con simetría central es que pase por el centro de simetría.

Ejercicio 3 (2019.5)**.** *Ali y Naqui juegan a un juego. Se empieza con el polinomio $P(x) = 1 + x^{1398}$. Naqui empieza y elige un número natural n tal que $0 \leq n \leq 1398$ y suma al polinomio P el término x^n. Después Ali hace lo mismo. Si después de jugar Ali existe algún punto $t \in \mathbb{R}$ con $P(t) < 0$, Ali pierde el juego. Demuestra que Ali puede jugar eternamente sin perder.*

Solución: Podemos suponer que Naqui solo coloca potencias impares. Por la desigualdad de medias aritmética-geométrica, $x^{2k} + x^{2k+2} \geq |2x^{2k+1}|$ para cualquier x real. Con esta idea, la estrategia entonces será, si Naqui coloca la potencia x^{2k+1} por primera vez, colocar la potencia x^{2k}. Si la coloca por segunda vez, la estrategia es colocar x^{2k+2}. La desigualdad anterior permite reducir el problema a que Naqui no repite potencia. Solo falta ver que esta elección cumple la condición del enunciado. Esto es directo usando que si $|x| \leq 1$, a menor potencia mayor es el valor del sumando, y observando que se puede emparejar cada potencia con la siguiente que se haya escrito (en orden de exponente) de forma que todos los sumandos son positivos. Se razona de forma análoga para $|x| \geq 1$.

Ejercicio 4 (2020.2)**.** *Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 1399$. Encuentra el valor máximo de $\lfloor x \rfloor y + \lfloor y \rfloor z + \lfloor z \rfloor x$. Aclaración: $\lfloor a \rfloor$ denota la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a.*

Solución: Denotando las partes enteras a, b, c y las partes fraccionarias α, β, γ, la función objetivo es $ab + ac + bc + a\beta + b\gamma + c\alpha$. La intuición sugiere que los valores de a, b, c deben ser parecidos (la función objetivo tiene simetría). Vemos que si $a \geq b + 2$, entonces el cambio $(a, b) \to (a - 1, b + 1)$ aumenta el valor objetivo. Como las partes fraccionarias suman $0, 1, 2$, solo hay tres casos posibles. Si suman 0 la función objetivo se acota sustituyendo los valores $a = 466 = b, c = 467$. Si suman 1 ya sabemos acotar la parte de la función objetivo correspondiente a $ab + ac + bc$. Como en este caso los tres a, b, c han de ser iguales, la parte fraccionaria tiene que sumar exactamente a. Se ve que el caso 1 da un valor menor al caso 0. Para el caso 2 volvemos a saber cuánto suman los tres primeros sumandos, los otros tienen la forma $466\xi + 465(2 - \xi)$ para $1 < \xi < 2$, que obviamente se acota por el valor en $\xi = 2$. Se ve que da un valor menor a los anteriores

Ejercicio 5 (2018.2)**.** *Sea n un número natural impar y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos. Probar que el conjunto $X = \{|x_i - x_j| : i < j\}$ se puede dividir en dos subconjuntos de forma que la suma de sus elementos coincida.*

Solución: Por inducción. El caso base $n = 3$ es trivial. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que los elementos están en orden creciente, luego no hacen falta los valores absolutos. Para el paso $n \to n + 2$, podemos quitar los términos que no involucren a x_{n+1}, x_{n+2} con la hipótesis de inducción. Es fácil agrupar los términos restantes de forma que la suma coincida. Por un lado equilibramos las 3 diferencias entre x_n, x_{n+1}, x_{n+2} y por otro vamos equilibrando las diferencias entre x_{n+1}, x_{n+2} y x_{2k}, x_{2k-1}.

Ejercicio 6 (2018.3)**.** *Sean a, k números naturales tales que $a > k$. Sean $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ y y $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ sucesiones de números naturales tales que*

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \ldots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \ldots (a^{s_n} + k).$$

Prueba que las sucesiones son iguales.

Solución: Como $a > k$, existe un primo p tal que p tiene mayor exponente en la factorización de a que en la de k. Expandiendo los dos lados y restando k^n, se ve que el mayor exponente de p que divide cada lado es $v_p(a^{r_1} * k^{n-1}) = v_p(a^{s_1} * k^{n-1})$, de donde $r_1 = s_1$. Concluir por inducción.

Ejercicio 7 (2018.4)**.** *Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x + y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

para cualesquiera x, y reales.

Solución: Se ve que si f es solución, $-f$ también. $P(0, 0)$ implica que $f(0) = 0$.
$P(1, 0) \Rightarrow f(1) = \pm 1$. Podemos suponer que es 1.
$P(x, 1 - x) \Rightarrow f(3x^2 - 3x + 1) = 3x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f(x) = x \quad \forall x \geq 1/4$.
$P(x, 0) \Rightarrow f(x)f(x^2) = x^3$. Combinando estas dos últimas relaciones, se deduce que $f(x) = x$ cuando x es mayor que $1/16, 1/16^2, \ldots$. Para llegar a valores negativos de x, se observa que $P(x, 0), P(-x, 0) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$. Como $f(0) = 0$, se concluye que las soluciones son $f(x) = \pm x$.

Ejercicio 8 (2019.2). *ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. X es un punto arbitrario de BC, y los puntos $Y \in AB$ y $Z \in AC$ satisfacen $\angle BXY = \angle ZXC$. La recta paralela a YZ que pasa por B corta a la recta XZ en T. Prueba que la recta AT es una bisectriz del triángulo.*

Solución: Sea D el punto de corte de las rectas BT y XY. Como $DT \parallel ZY$, $XY/XZ = XD/XT$. Como ABC es isósceles, por construcción $\triangle BXY \sim CXZ$, luego $XY/XZ = XB/XC$. Combinando las dos igualdades obtenidas, $XD/XT = XB/XC$. Además, de $\angle BXY = \angle ZXC$ se deduce $\angle CXT = \angle BXD$, luego $\triangle BXD \sim \triangle CXT$, luego $\angle XBD = \angle CBT = \angle BCT$, por lo que $\triangle BCT$ también es isósceles, luego T está en la bisectriz del ángulo A.

Ejercicio 9 (2018.5). *Tenemos lámparas en una habitación, y* 5 *interruptores. Cada interruptor está conectado a una o varias lámparas, y cambia sus estados (encendida o apagada) al pulsarlo. Al pulsar dos interruptores distintos alguna lámpara tiene que cambiar de estado. Al pulsar los* 5 *interruptores todas las lámparas cambian de estado. Si todas las lámparas están inicialmente apagadas, demuestra que podemos pulsar* 3 *interruptores de forma que se enciendan al menos* 2 *lámparas.*

Solución: Problema lioso porque parece trivial, ya que solo hay que encender 2 lámparas. Es fácil ver que necesariamente hay 3 o más lámparas. Consideramos el grafo bipartito que tiene a cada subconjunto de tres interruptores por un lado, y cada lámpara por otro. Los unimos si al pulsar el grupo de 3 interruptores se enciende la lámpara en cuestión. Si el enunciado es falso, tenemos como mucho 10 aristas (una por grupo de interruptores). Sabemos que cada lámpara está conectada al menos a un interruptor. Si una lámpara está conectada a k interruptores, tiene que estar unida a $\binom{k}{3} + \binom{k}{1}\binom{5-k}{2}$ grupos de tres interruptores, y se ve que ese número combinatorio es ≥ 4 para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Por tanto tenemos al menos $4n$ aristas, luego hay al menos 12 aristas, así que el enunciado es cierto.

Ejercicio 10 (2020.5). *Llamamos a un par de números naturales (a, b) buenos si $ab+1$ es un cuadrado perfecto. Determinar los n para los que es posible dividir el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en n pares disjuntos de números buenos.*

Solución: Observamos en primer lugar que $l, l + 2$ es una par bueno para cualquier l. Esto implica que para cualquier n par es posible. Observamos haciendo congruencias módulo 8 que los números con resto $2, 6$ deben emparejarse con múltiplos de 4. Para n impar hay un número más del primer grupo que del segundo, así que no es posible en este caso.

Ejercicio 11 (2019.4). *Sea el círculo con diámetro AB. C y D son puntos en la circunferencia que están en lados opuestos respecto AB. La paralela a AC que pasa por D corta a AB en E. La paralela a AD que pasa por C corta a AB en F. La perpendicular a AB por E corta a BC en X, y la perpendicular a AB por F corta a BD en Y. Prueba que el perímetro del triángulo AXY es dos veces la longitud de CD.*

Solución: Denotamos N el corte de las rectas AX y CD, y por M el corte de las rectas AY y CD. Por ángulos inscritos, tiene que $\angle ADB = \angle AEX = 90^o$, luego el cuadrilátero $AEXD$ es cíclico. Por ángulos inscritos o por paralelas, $\angle NDX = \angle BAC = \angle AED = \angle AXD$. Entonces $\triangle DNX$ es isósceles, luego $DN = NX$. Entonces N está en la mediatriz de DX, y como pasa por el circuncentro de AXD, que es rectángulo, N es dicho circuncentro y $AN = NX$. Ya está todo hecho. De forma análoga se tiene $CM = AM = MY$. Por semejanza de triángulos, $XY = 2NM$. Se concluye que $XY + AX + AY = 2NM + 2ND + 2MC = 2CD$.